УДК 517.977

Ф. А. Шолохович

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ε-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В 50-х годах возник и начал быстро возрастать интерес к математической теории оптимальных процессов. Для динамических систем в конечномерных пространствах вопрос управляемости, т.е. существования управляющего воздействия, переводящего систему из одного состояния в другое (эти состояния могут назначаться произвольно), решается более или менее просто. Поэтому основное внимание исследователей сосредоточилось на вопросах качества управления, иначе говоря, на достижении заданной цели оптимальным с точки зрения того или иного критерия способом.

В бесконечномерных динамических системах, в том числе системах с распределенными параметрами, исследование управляемости оказалось значительно более сложным. К тому же в обновленных условиях, но при старой формулировке задачи обнаружилось отсутствие управляемости линейных систем (ниже этот вопрос затрагивается). Так появились новые теоретические постановки проблемы. Одна из них мало отличается от прежней и достаточно приемлема с точки зрения приложений (ε-*управляемость* с конечномерным управлением), другая, по-видимому, трудно поддается технической реализации (точная или ε-*управляемость* с бесконечномерным управлением: управляющее устройство в каждый момент времени должно вырабатывать функцию).

Охватить все результаты по управлению бесконечномерными системами, включая оптимизацию, в настоящем кратком обзоре невозможно. Поэтому за рамками обзора остались исследования по системам с нелинейными членами, вопросы оптимизации, наблюдаемости и др. Но даже с этими оговорками обзор не претендует на полноту. Здесь перечисляются основные результаты, полученные математиками Екатеринбурга, Харькова, Минска и некоторых других городов. Подробности можно найти в цитируемых первоисточниках.

1. Конечномерное управление

В библиографических ссылках, содержащихся в ряде работ, посвященных теме обзора (например, в [1]), указывается, что “вопрос о точной управляемости в бесконечномерном пространстве рассматривался впервые для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{1.1}$$

в работе [2]”. Это уравнение изучалось в предположении, что X — гильбертово пространство, $A \in L[X]$, $b \in X$, u — скалярное управление. Основной результат статьи [2] состоит в том, что при некоторых условиях в пространстве X существует множество точек, которые не управляемы в 0.

Этот результат был обобщен в работе Л. М. Куперман и М. Ю. Репина [3], где доказана неуправляемость любой динамической линейной системы вида (1.1) с ограниченным оператором A в бесконечномерном пространстве, если управляющее воздействие конечномерно. При этом управляемость понималась в указанном выше смысле (попадание из любой точки в любую), а неуправляемость — как отрицание этого свойства.

Р. Калман и др. в [4] ввели понятие, названное ими *полной управляемостью.* Речь шла о свойстве более слабом, чем точная управляемость: попадание из начала координат в произвольную ε-окрестность точки. Это свойство для случая самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве изучалось Х. О. Фатторини [5]. А. Б. Куржанский [6] предложил для упомянутого свойства термин *ε-управляемость* и сформулировал критерий ε-управляемости в нуль для системы (1.1):

Теорема 1.1. *Система* (1.1) *в банаховом пространстве B ε-управляема за любое время $T > 0$ в том и только в том случае, если линейная оболочка векторов $(b, Ab, \cdots, A^n b, \cdots)$ плотна в B.*

Неосуществимость точной управляемости скалярным (или конечномерным векторным) управлением обусловила развитие исследований в двух направлениях в соответствии с упомянутыми выше двумя постановками проблемы:

1) ε-управляемость для конечномерного управления;

2) точная и ε-управляемость для бесконечномерного управления (управляющее воздействие само принадлежит в каждый момент времени некоторому банахову пространству).

Продолжим рассмотрение исследований в первом направлении. В работе [7] приведен пример отсутствия полной ε-управляемости линейной системы и доказана теорема о необходимом и достаточном условии ε-управляемости. Теорема обобщает критерий Куржанского на случай неограниченного оператора A в уравнении (1.1) при условии сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n b. \tag{1.2}$$

На примере показана возможность сходимости этого ряда. Результат формулируется так:

Теорема 1.2. *Пусть B — банахово пространство, A — инфинитезимальный оператор полугруппы $\{f(t)\}$, $t \geq 0$, $p \in B$ и $b \in D(A^n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Если при $0 \leq t < T_1$ ряд (1.2) сходится к $f(t)b$, то линейная динамическая система*

$$\varphi(t, p, u) = f(t)p + \int_0^t f(t-\tau) b u(\tau) d\tau$$

ε-управляема за время $T \in (0, T_1)$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка векторов $(b, Ab, \cdots, A^n b, \cdots)$ плотна в области значений оператора $f(T)$.

В статье [8] изучается *TM-ε-управляемость* точки p в точку q, которая определяется следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists u(t) \in L_1[0, T], \ \|u\|_{L_1} \leq M : \ \|\varphi(T, p, u) - q\| < \varepsilon.$$

Здесь $\varphi(t, p, u)$ — решение уравнения

$$\frac{dp}{dt} = Ap + b(t)u + c(t) \tag{1.3}$$

(оператор A — замкнутый линейный), т.е.

$$\varphi(t, p, u) = f(t)p + \int_0^t f(t-\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau + \int_0^t f(t-\tau) c(\tau) d\tau.$$

В указанной статье применен новый подход к изучению проблемы, исключающий рассмотрение множества $(b, Ab, \cdots, A^n b, \cdots)$ и опирающийся на свойства кривой $\Gamma = \{f(T-\tau)b(\tau), \ 0 \leq \tau \leq T\}$. Доказана

Теорема 1.3. *Точка p TM-ε-управляема в точку q тогда и только тогда, когда выполняется включение*

$$f(T)p - q + \int_0^T f(T-\tau)c(\tau)d(\tau) \in \Pi_M\{f(T-\tau)b(\tau),\ 0 \le \tau \le T\}.$$

Здесь через $\Pi_M(\Gamma)$ обозначено замыкание множества всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum_{i=1}^N \lambda_i\gamma_i$, где $\gamma_i \in \Gamma, N \ge 1$ произвольно и $\sum_{i=1}^N |\lambda_i| \le M$ (при $M = \infty$ применяется обозначение $\Pi(\Gamma)$, а свойство называется *T-ε-управляемостью*).

Наиболее просто выглядит условие *T-ε-управляемости в нуль* (т.е. когда $q = 0$) для уравнения (1.1):

$$f(T)p \in \Pi\{f(\tau)b,\ 0 \le \tau \le T\}.$$

Как следствие теоремы 1.3 легко получается приведенный выше критерий из работы [7].

Вопрос об управляемости системы предшествует вопросу об оптимальности управления. Нахождение оптимального управления не лишено смысла только в том случае, когда имеется не только управляемость, но и возможность неоднозначного выбора из множества управлений, приводящих к желаемой цели. Существуют, однако, системы, в которых любая точка достижима из нуля за данное время лишь с помощью единственного управления (см. [9],[10]). Их называют *жесткими*, а остальные системы — *мягкими*. Жесткость проявляется при переходе к бесконечномерным системам. В статье С. А. Нефедова [11] изучаются условия жесткости и мягкости систем. Приведем один важный результат.

Теорема 1.4. *Если сужение оператора A в уравнении* (1.1) *на замыкание множества точек, достижимых из нуля, представляет собой ограниченный оператор, то система* (1.1) *является мягкой тогда и только тогда, когда упомянутое замыкание конечномерно.*

Способ, с помощью которого можно расширить возможности управления, предлагается в статье С. А. Нефедова [12]. Здесь рассматривается уравнение (1.1) в комплексном банаховом пространстве B и используется конструкция Ю. М. Репина для построения пополнения B_1 банахова пространства B по более слабой, чем в B, норме, например, $\|x\|_1 = \|R(\lambda_0, A)x\|$, где $\lambda_0 \notin \sigma(A)$, $R(\lambda_0, A)$ — резольвента оператора A, порождающего сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)$. Через K_t^ℓ обозначается множество точек, достижимых из нуля за время t с помощью комплекснозначного управления u, принадлежащего пространству Соболева $W_2^\ell[0,t]$, $\ell = 0,1,2,\dots$ (в частности, при $\ell = 0$ управления выбираются из $L_2[0,t]$). Система

$$\frac{dp(t)}{dt} = Ap(t) + bu(t), \quad p(0) = 0, \tag{1.4}$$

называется *управляемой*, если $K_t^0 = B$ при некотором $t > 0$.

Резольвента $R(\lambda_0, A)$ продолжается по непрерывности на B_1. На B_1 индуцируется сильно непрерывная полугруппа $T_1(t)$ с производящим оператором A_1. Пространство B можно отождествить с областью $D(A_1)$ определения оператора A_1. Через $(B, T(t))$ обозначается система без управления, соответствующая системе (1.4). Система $(B_1, T_1(t))$ называется *пополнением* системы $(B, T(t))$.

Система $(B, T(t))$ называется *ℓ-квазиуправляемой*, если существуют ее пополнение $(B_1, T_1(t))$ и элемент $b_\ell \in B_1$ такой, что при некотором $t > 0$ $K_t^\ell(b_\ell) = B$. Система $(B, T(t))$, ℓ-квазиуправляемая при любом ℓ, называется *квазиуправляемой.* Оказывается, что система, ℓ-квазиуправляемая при некотором ℓ, является квазиуправляемой. В [12] доказывается ряд предложений, связывающих квазиуправляемость системы со свойствами спектра $\sigma(A)$, выраженными в терминах правильной последовательности. Роль этой последовательности играет множество полюсов, составляющих спектр $\sigma(A)$.

В статье [13] рассматривается управление с помощью граничного условия. Строится полугрупповая модель *граничного управления.* Система задается в пространстве Z уравнениями

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Lz(t), \; z(0) = z_0, \tag{1.5}$$

$$\tau(z(t)) = \sum_{i=1}^n y_i v_i(t). \tag{1.6}$$

Здесь L — замкнутый линейный оператор, τ — линейный граничный оператор, $v_i(t)$ — управления. При определенных условиях решение граничной задачи (1.5)–(1.6) совпадает с решением уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = A_{-1}z(t) + Bv(t), \quad Bv = -\sum_{i=1}^n A_{-1}z_i v_i \tag{1.7}$$

в пространстве Z_{-1}, являющемся пополнением исходного пространства Z по норме $\|z\|_{-1} = \|R(\lambda, A)z\|_Z$, $\lambda \notin \sigma(A)$. Оператор A_{-1} есть расширение на Z_{-1} оператора A, определенного в области $D(A) = \{z | z \in D(L),\ \tau(z) = 0\}$ равенством $Az = -Lz$. Через $T(t)$ и $T_{-1}(t)$ обозначаются сильно непрерывные полугруппы операторов, порожденные соответственно операторами A над Z и A_{-1} над Z_{-1}. Доказаны два результата:

Теорема 1.5. *Система* (1.7) *управляема за время* t_0 *тогда и только тогда, когда существуют константы* $m, M > 0$ *такие, что для любого* $f \in D(A^*)$

$$m\|f\| \le \|B^*T^*(\xi)f\|_{L_2[0,t_0,V]} \le M\|f\|, \quad V = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n)\} \subset R^n.$$

Теорема 1.6. *Система* (1.7) *управляема за время* t *тогда и только тогда, когда оператор* $W_t : Z \to Z$*, определяемый равенством*

$$W_t z = \int_0^t T_{-1}(\xi)B(\tilde{G}z)(\xi)d\xi,$$

является положительно определенным.

Здесь оператор G задается формулой $Gv = \displaystyle\int_0^{t_0} T_{-1}(\xi)Bv(\xi)d\xi$, а $\tilde{G}$ — продолжение G^* по непрерывности на все пространство Z. Управляемость понимается как возможность достичь из нуля любой точкй $z \in Z$.

Система (1.7) называется *замкнутой*, если ее ослабленное решение

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-\xi)Bv(\xi)d\xi,$$

которое в общем случае принадлежит пространству Z_{-1}, содержится в Z при любых $z_0 \in Z$ и $v_i(\xi) \in L_2[0, t_0]$ $(v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V = R^n)$.

Система (1.7) называется *абсолютно стабилизируемой* за время t_0, если существует линейный оператор K, отображающий свою область определения $D(K) \subseteq Z$ в V такой, что оператор

$$A_K = A_{-1} + BK, \quad D(A_K) = \{z | z \in D(K), \quad A_K z \in Z\}$$

порождает сильно непрерывную нильпотентную полугруппу $S(t)$ операторов над пространством Z, удовлетворяющую условию $S(t_0) = 0$. В [13] доказана

Теорема 1.7. *Пусть система* (1.7) *замкнута, управляема за время* t_0 *и не существует функции* $v \in L_2(0, t_0, V)$, $v \not\equiv 0$*, такой, что*

$$\int_0^{t_0} T_{-1}(t-\xi)Bv(\xi)d\xi = 0$$

(*т.е. система не может быть переведена из* 0 *в* 0 *ненулевым управлением за время* t_0). *Тогда система* (1.7) *абсолютно стабилизируема за время* t_0.

Вопрос о стабилизируемости системы

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z_0, \tag{1.8}$$

в комплексном банаховом пространстве Z рассматривается в работе [14]. Сильно непрерывная полугруппа, порожденная оператором A, обозначается T_t^A. Управление $u(t)$ принимает значения в конечномерном пространстве R^n, B — линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий R^n на свою область значений в пространстве Z.

Типом полугруппы T_t^A называют число $\omega = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln \|T_t^A\|}{t}$. Однородную систему $\dfrac{dz(t)}{dt} = Az(t)$, а вместе с ней и полугруппу T_t^A называют *экспоненциально устойчивой*, если для нее $\omega < 0$.

Система (1.8) называется (*экспоненциально*) *стабилизируемой*, если существует линейный ограниченный оператор $D \in L[Z, R^n]$ такой, что система

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + BDz(t)$$

является экспоненциально устойчивой.

В [14] рассматривается ситуация, когда существует такое число $\gamma < 0$, что спектр $\sigma(A)$ оператора A обладает следующим свойством: множество $\sigma_u = \{\lambda \in \sigma(A), Re\lambda > \gamma\}$ ограничено и может быть отделено от остальной части σ_S спектра $\sigma(A)$ простым гладким замкнутым контуром. Это значит, что оператор A обладает спектральным разложением и пространство Z разлагается в прямую сумму $Z = Z_u \oplus Z_S$ инвариантных относительно T_t^A подпространств. Здесь $Z_u = PZ$, а $Z_S = \tilde{P}Z$, причем P — проектор, соответствующий спектральному множеству σ_u, $\tilde{P} = I - P$. Система (1.8) распадается в этом случае на две системы:

$$\frac{dz_u(t)}{dt} = A_u z_u(t) + PBu(t), \tag{1.8$_u$}$$

$$\frac{dz_s(t)}{dt} = A_s z_s(t) + \tilde{P}Bu(t), \tag{1.8$_s$}$$

где $A_u = AP$, $A_s = A\tilde{P}$, $z_u = Pz$, $z_s = \tilde{P}z$, $z = z_u + z_s$, $\sigma_u = \sigma(A_u)$, $\sigma_s = \sigma(A_s)$. Оператор A_u является ограниченным.

Критерий стабилизируемости в описанной ситуации формулируется так.

Теорема 1.8. *Для стабилизируемости системы* (1.8) *необходимо и достаточно существование такого спектрального разложения оператора* A, *что полугруппа* T_t^A *экспоненциально устойчива, а система* (1.8_u) *конечномерна и управляема (управляемость понимается в смысле перехода из* 0 *в произвольную точку* Z *за время* $t > 0$).

Получился довольно естественный результат: конечномерный вход позволяет стабилизировать лишь некоторую конечномерную подсистему системы (1.8).

В статье [15] исследуется уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + c(t). \tag{1.9}$$

Как и в уравнении (1.3), оператор $A(t)$ неограничен, но теперь он зависит от t. Изучение ε-управляемости в данном случае потребовало более тонкого рассмотрения самого этого свойства, что привело к введению трех определений.

В первом время t движения из точки x_0 в ε-окрестность точки y_0 не зависит ни от точек x_0, y_0, ни от ε.

Во втором время t зависит от точек x_0, y_0.

В третьем (это свойство названо *квази-ε-управляемостью*) время зависит и от точек x_0, y_0, и от ε.

Доказаны две теоремы, аналогичные теореме Красовского [16, с.148] об управляемости линейной конечномерной системы с переменными коэффициентами. Следуя Н. Н. Красовскому, введем обозначения:

$$L_0(t) = b(t), \quad L_k(t) = A(t)L_{k-1}(t) - \frac{d}{dt}L_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots \,. \tag{1.10}$$

$\Pi(F)$ обозначает наименьшее линейное подпространство, содержащее множество F.

Приведем упрощенные (за счет некоторого уменьшения общности) формулировки упомянутых теорем.

Теорема 1.9. *Пусть в промежутке* $(\alpha, \beta) \subset (0, T)$ *выполняются условия:*

a) *существует вектор-функция* $L_k(t)$ *для* $k = 1, 2, 3, \cdots$;

б) $b(t)$ *обладает свойством: существует* $\sigma > 0$ *такое, что для любого* $t \in (\alpha, \beta)$ *вектор* $b(t)$ ε*-достижим из нуля по траекториям уравнения* $\dot{x} = A(t)x + b(t)u$ *за время* Θ *для любого* $\Theta \in [t, t+\sigma) \cap (\alpha, \beta)$;

в) *существует такое число* $t^* \in (\alpha, \beta)$, *что*

$$\Pi(\{L_k(t^*)\}_{k=0}^{\infty}) = B.$$

Тогда динамическая система (1.9) *вполне* t^*-ε*-управляема* (*т.е. время* t^* *движения не зависит ни от точек* x_0, y_0, *ни от* ε).

Теорема 1.10. *Если выполняются условия теоремы* 1.9, *но в предположении* $\alpha = 0$ *и* $t^* = 0$, *то система* (1.9) *вполне квази-*ε*-управляема за время* T (*т.е. для каждой пары точек* x_0, y_0 *и каждого* $\varepsilon > 0$ *имеется свое время движения* $t \in (0, T)$).

2. Бесконечномерное управление

Перейдем ко второму направлению исследований. Само по себе бесконечномерное управление введено в [7], но только в простом примере. Позднее В. А. Якубович [17] рассмотрел уравнение $\dot{x} = Ax + bu$ в гильбертовом пространстве X с управлениями из гильбертова пространства U. Точная управляемость в нуль называется в статье [17] *полной управляемостью*, а ε-управляемость в нуль — *управляемостью.* Приведены семь равносильных между собой критериев управляемости. Например, один из них формулируется так: для управляемости необходимо и достаточно совпадение замкнутой линейной оболочки векторов $\{A^n bu\}$ с пространством X. Утверждается также равносильность управляемости и попадания из любой точки пространства X в произвольную δ-окрестность всякой другой точки X.

В статье [18] высказаны некоторые предположения, касающиеся нуль-управляемости уравнения $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, в котором управляющее воздействие является абстрактной функцией. Результаты формулируются при довольно серьезных ограничениях.

Обсуждаемой тематике посвящен ряд работ В. И. Коробова и его учеников. В диссертации Р. Рабах [19] рассматривается линейная система с запаздыванием в банаховом пространстве:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \; x \in X, \; u \in U, \tag{2.1}$$

$$x_0(\cdot) = \{x_0(t) = \varphi(t), \; t \in [-h, 0), \; x_0(0) = x_0\}. \tag{2.2}$$

Здесь A и A_1 — ограниченные операторы, X и U — банаховы пространства. Приводятся условия точной и ε-управляемости таких систем в терминах совпадения с X линейной оболочки или ее замыкания для областей значений некоторой последовательности операторов, отображающих все U в X. Изучаются условия наблюдаемости систем с запаздыванием, связь наблюдаемости и управляемости, экспоненциальная стабилизируемость системы $\dfrac{dx}{dt} = Ax + bu$ в гильбертовом пространстве. Отметим, что иной подход, связанный со спектральным разложением оператора A, позволил (см. [14]) получить другой критерий экспоненциальной стабилизируемости в банаховом пространстве. В диссертации Р. Рабах изучается также точная и ε-управляемость системы (2.1)–(2.2) с начальной функцией $\varphi(t)$ в качестве управляющего воздействия. Содержание диссертации опубликовано в нескольких статьях в Вестнике Харьковского университета (Прикладная математика и механика. 1978. Вып.43; 1979. Вып.44).

В работе В. И. Коробова и Р. Рабах [1] рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{2.3}$$

где $x \in X$ и $u \in U$, X и U — банаховы пространства, $A(t)$ и $B(t)$ при всех $t \in [0, T]$ ограничены. Основным результатом авторов является

Теорема 2.1. *Пусть $A(t)$ и $B(t)$ аналитичны на $[0, T]$. Для того чтобы система (2.3) была точно управляемой в нуль, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $k \geq 0$*

$$sp\{L_0(t_0)U,\ L_1(t_0)U, \ldots,\ L_k(t_0)U\} = X.$$

Здесь $L_k(t)$ определяется по формулам (1.10), а $sp(F)$ означает линейную оболочку множества F.

Во всех цитированных выше работах, кроме [8], на управляющее воздействие не налагалось никаких ограничений, за исключением принадлежности к тому или иному пространству. В. И. Коробовым и Нгуен Хоа Шоном ([20],[21]) проведены исследования по управляемости при наличии ограничений на управление. Требуется, чтобы в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ x \in X,\ u \in U, \tag{2.4}$$

где X, U — банаховы пространства, A, B — линейные ограниченные операторы, выполнялось ограничение на u:

$$u \in \Omega \subset U. \tag{2.5}$$

В работе изучаются свойства множества S_T-нуль-управляемости системы (2.4). По определению $x_0 \in S_T$, если из x_0 можно попасть в 0 за время $T < \infty$ с помощью допустимого управления $u(t)$.

Если S_T содержит окрестность нуля, система называется *локально управляемой* за время T. Если замыкание $\bar{S}_T$ содержит окрестность нуля, то система называется *локально ε-управляемой* за время T. На примере показано, что эти два понятия различны.

Множество $S = \bigcup_{T>0} S_T$ называется *множеством нуль-управляемости за свободное время*. Аналогично предыдущему вводятся понятия *локальной управляемости* и *локальной ε-управляемости за свободное время.*

В формулировке некоторых результатов используется множество всех относительно внутренних точек выпуклого множества Ω, обозначаемое $ri\,\Omega$ (в качестве Ω берется множество, которое должно удовлетворять условию $0 \in \bar{\Omega}$). Точка $u_0 \in \Omega$ называется *относительно внутренней* точкой множества Ω, если для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место включение $(u_0 + \varepsilon U_1) \cap \overline{sp}\,\Omega \subset \Omega$, где U_1 — единичный шар в U. В [20] доказаны такие результаты:

Теорема 2.2. *Если множество Ω ограничено и $0 \in ri\,\Omega$, то система (2.4)–(2.5) управляема за время T тогда и только тогда, когда она локально ε-управляема за время T.*

Теорема 2.3. *Пусть для системы (2.4)–(2.5) выполняется условие $\Omega \cap KerB \neq \emptyset$ и $int\bar{S}_{T_0} \neq \emptyset$ при некотором конечном T_0. Тогда если система (2.4)–(2.5) локально ε-управляема за свободное время, то она локально ε-управляема за некоторое конечное время $T_1 > 0$.*

Приведем некоторые результаты из [21]. Здесь вводится определение: систему (2.4) называют *глобально точно управляемой*, если для любого $x_0 \in X$ существуют $T > 0$ и функция $u(t) \in L_\infty([0,T], U)$ такие, что решение $x(t)$ системы (2.4) при $u = u(t)$ и при $x(0) = x_0$ удовлетворяет условию $x(T) = 0$.

Теорема 2.4. *Для того чтобы система (2.4) была глобально точно управляема, необходимо и достаточно, чтобы $sp\{BU, ABU, \ldots, A^k BU\} = X$ при некотором конечном $k \geq 0$.*

Теорема 2.5. *Пусть множество Ω выпукло и $ri(\Omega - u_0) \neq \emptyset$ при некотором $u_0 \in \Omega$ таком, что $Bu_0 = 0$. Тогда для того, чтобы система (2.4)–(2.5) была локально управляема за свободное время, необходимо и* *достаточно, чтобы при некотором конечном* $m \geq 0$ *выполнялись следующие условия:*

1) $0 \in int\ co\{B\Omega, AB\Omega, \ldots, A^m B\Omega\}$;

2) $0 \in int\ co\{B\Omega, -AB\Omega, \ldots, (-1)^m A^m B\Omega\}$.

Теорема 2.6. *Пусть выполняются условия* 1–2 *теоремы* 2.5 *и другие ее условия* (*не оговаривается лишь условие выпуклости множества* Ω), *тогда система* (2.4)–(2.5) *локально* ε*-управляема за свободное время.*

В цитируемой работе имеются критерии управляемости, локальной управляемости, а также локальной ε-управляемости за свободное время, сформулированные в терминах сопряженного оператора A^*. Подчеркнем, что все результаты получены при постоянном ограниченном операторе A в системе (2.4) и бесконечномерном управлении.

В заключение авторы указывают что результаты [21] справедливы для систем вида $\dfrac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u)$, $u \in \Omega$, $\exists u_0 \in \Omega:\ \ \varphi(u_0) = 0$, где φ — непрерывное отображение из U в X.

Следует упомянуть о диссертации А. В. Шапиро [22]. Часть работы посвящена управляемости линейных систем с бесконечномерным управлением. Наряду с общепринятым определением управляемости вводится другое понятие, которое можно было бы условно назвать управляемостью в слабом смысле, так как определение опирается на равенство, в котором содержатся функционалы из сопряженных пространств. Интересен результат, относящийся к уравнению $\dot{x} = Ax + bu$ со скалярным управлением. Предполагается, что фазовое пространство гильбертово, а $\{x_n\}$ — его ортонормированный базис. Утверждается следующее:

Теорема 2.7. *Пусть* $b \sim \sum c'_n x_n$, $\bar{x} \sim \sum c''_n x_n$ *— разложения в ряд Фурье векторов* $b, \bar{x} \in X$. *Для того чтобы вектор* $\bar{x}$ *принадлежал области достижимости из* 0, *необходимо, чтобы* $(c''_n/c'_n) \in \ell^2$ (*в случае* $c'_n = c''_n = 0$ *считается* $(c''_n/c'_n) = 0$).

В работе А. П. Маринича [23] получены новые критерии ε-управляемости линейных систем с бесконечномерным управлением (при наличии или отсутствии ограничений на управляющее воздействие).

Изучается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u. \tag{2.6}$$

Фазовое пространство X и пространство управлений U банаховы, к тому же U рефлексивно. Операторы $A(t)$ и $B(t)$ ограничены при каждом t, $A(\cdot) \subset L_1([t_0,t_1],[X])$, $B(\cdot) \in L_p([t_0,t_1],[U,X])$. Управление $u(t)$ — сильно измеримая функция и $u(\cdot) \in L_q([t_0,t_1],U)(1 < p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1)$. При этом ε-управляемость из точки x_0 в точку x_1 понимается как попадание из точки x_0 в произвольную ε-окрестность точки x_1. Если это свойство выполняется для любых $x_0, x_1 \in X$, то система называется *ε-управляемой.*

Чтобы сформулировать результаты, потребуется ввести некоторые обозначения. Пусть $f \in X^*$, $\langle f, x\rangle$ — билинейный функционал,

$$Q(x,\varepsilon) = \{f \in X^* : \ \Big|\langle f, x\rangle - \varepsilon\|f\|_{X^*}\Big| = 1\}.$$

Решение уравнения (2.6) дается известной формулой

$$x(t,t_0,x_0,u) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t,t_0)$ — решение уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$. Вводятся обозначения:

$$G(\tau) = \Phi(t_1,\tau)B(\tau);$$

$$\lambda(x,\varepsilon) = \begin{cases} \inf\limits_{f\in Q(x,\varepsilon)} \|G^*(\cdot)f\|_{L_p}, & \text{если} \ \ Q(x,\varepsilon) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если} \ \ Q(x,\varepsilon) = \emptyset; \end{cases}$$

и

$$x' = x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0.$$

В статье получены следующие результаты:

Теорема 2.8. *Система* (2.6) *ε-управляема из точки x_0 в точку x_1 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\lambda(x_1,\varepsilon)$>0.*

Теорема 2.9. *Система* (2.6) *ε-управляема тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ выполнено неравенство $\lambda(x,\varepsilon) > 0$.*

Теорема 2.10. *Система* (2.6) *управляема из точки x_0 в наперед заданную ε_0-окрестность точки x_1 тогда и только тогда, когда $\lambda(x_1,\varepsilon_0) > 0$.*

Для доказательства теорем 2.8–2.10 автор применяет метод, использующий условие разрешимости так называемой “проблемы моментных неравенств”. Этот метод для случая постоянных операторов A и B позволил получить необходимое и достаточное условие ε-управляемости в форме, по существу совпадающей с известным равенством [8, формула (3)]

$$clsp\{BU, ABU, A^2BU, \ldots\} = X$$

(слева стоит замыкание линейной оболочки областей значений A^iBU, $i = 0, 1, 2, \ldots$).

Для случая аналитических оператор-функций $A(t)$ и $B(t)$ доказана теорема, в какой-то мере аналогичная результатам работ [20] (о точной управляемости) и [15] (об ε-управляемости скалярным управлением):

Теорема 2.11. *Для того чтобы для любого $\varepsilon > 0$ имело место неравенство $\lambda(x_0, \varepsilon) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_0 \in clsp\{L_0(t^*)U, L_1(t^*)U, L_2(t^*)U, \ldots\}.$$

Здесь $t^* \in [t_0, t_1]$, а $L_i(t)$ такие же, как в [16] или статьях [20],[15]. (Сопоставьте с теоремой 2.9.)

Еще два результата относятся к случаю, когда управляющее воздействие должно подчиняться ограничению $\|u(\cdot)\|_{L_q} \leq M$:

Теорема 2.12. *Система (2.6) ε-управляема из точки x_0 в точку x_1 при наличии ограничения на управление тогда и только тогда, когда $\lambda(x_1, \varepsilon) \geq \dfrac{1}{M}$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема 2.13. *Система (2.6) управляема из точки x_0 в наперед заданную ε_0-окрестность точки x_1 при наличии ограничения на управление тогда и только тогда, когда $\lambda(x_1, \varepsilon_0) \geq \dfrac{1}{M}$.*

По-видимому, имеется что-то общее между результатами, полученными в [23] и [8]. В первом случае используется оператор $G(\tau) = \Phi(t_1, \tau)B(\tau)$, а во втором — $f(T-\tau)b(\tau)$. Правда, указаний на это сходство в статье [23] нет и методы доказательств совершенно различны. Интересно, что в [8] теорема тоже формулируется для управления с ограничением.

В статье [24] изучается управляемость системы вида

$$\dot{x}(t) = Lx(t) + B_0u_0(t), \tag{2.7}$$

$$Gx(t) = B_1u_1(t), \tag{2.8}$$

$$x(0) = x_0.$$

Здесь $u_0 \in U_0$, $u_1 \in U_1$, U_0, U_1 — банаховы пространства, оператор L неограничен, а B_0 и B_1 ограничены. Термин *приближенная нуль-управляемость* употребляется в смысле ε-управляемости в нуль. Через A обозначается сужение оператора L на ядро оператора G, а через σ — спектр оператора A, который предполагается чисто точечным и либо конечным, либо не имеющим конечных предельных точек. На оператор A накладывается и ряд других ограничений, часть из которых должна выполняться при t, большем некоторого T_0. Порождаемая оператором A сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов обозначается через $S(t)$. Через $x = D(\mu)y$ обозначено решение уравнений

$$Lx = \mu x, \quad Gx = y,$$

где $D(\mu)$ — линейный ограниченый оператор, $\mu \notin \sigma$. Доказаны две теоремы:

Теорема 2.14. *Для того чтобы система* (2.7)–(2.8) *была приближенно нуль-управляемой на* $[0, t]$*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\mu \notin \sigma$ *тождества*

$$\forall t \in [0, t_1] \; \forall u_0 \in U_0 : \quad (S(t)B_0 u_0, g) = 0,$$

$$\forall t \in [0, t_1] \; \forall u_1 \in U_1 : \quad ((\mu I - A)S(t)D(\mu)B_1 u_1, g) = 0$$

были справедливы только при $S^*(t_1)g = 0$.

Теорема 2.15. *Для того чтобы система* (2.7)–(2.8) *была приближенно нуль-управляемой на* $[0, t_1]$*, необходимо, а при* $t_1 > T_0$ *и достаточно, чтобы уравнение*

$$Ax - \lambda x + B_0 u_0 + D(\mu)B_1 u_1 = f$$

было плотно разрешимо при любых $\lambda \in \sigma$ *и* $\mu \notin \sigma$.

Используя в теореме 2.14 сопряженный оператор $S^*(t)$, автор тем не менее справедливо отмечает, что в предшествующих работах "условия приближенной нуль-управляемости ... обычно выражались через $S^*(t)$, что создавало определенные трудности при применении этих результатов к конкретным системам с распределенными параметрами". Эффективность теоремы 2.15, свободной от применения $S^*(t)$, демонстрируется на примерах, в которых рассматривается вопрос о приближенной нуль-управляемости двух заданных линейных уравнений в частных производных (одно из них параболического, а другое — эллиптического типа).

В. И. Назаровым в статьях [25],[26] изучаются управляемые системы с распределенными параметрами в шкалах банаховых пространств. Теория дифференциальных уравнений в таких шкалах, используемая автором, разработана Л. В. Овсянниковым [27].

Пусть P — конечный или бесконечный интервал на числовой прямой. *Шкалой* называется такое семейство банаховых пространств $\{E_s,\ s \in P\}$, что для любых $s_1, s_2 \in P,\ s_1 < s_2$, банахово пространство E_{s_2} непрерывно вложено в E_{s_1}. Определяется несколько понятий.

Пусть $E = \bigcup_{s\in P} E_s,\ \delta > 0$. Оператор $A : E \to E$ называется и$_\delta$-*непрерывным в шкале* $\{E_s,\ s \in P\}$, если для любого $s \in P$ такого, что $s+\delta \in P$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор A^n непрерывно отображает $E_{s+\delta}$ в E_s. Оператор $A : E \to E$ называется и-*непрерывным в шкале* $\{E_s,\ s \in P\}$, если для любых $s_1, s_2 \in P$, $s_1 < s_2$ оператор A непрерывно действует из E_{s_2} в E_{s_1}.

Естественным образом вводятся понятия δ-группы $\{T_t, t \in R\}$ и δ-полугруппы $\{T_t, t \geq 0\}$ линейных операторов в шкале банаховых пространств (оператор T_t предполагается и$_\delta$-непрерывным), а также генератора A δ-группы или δ-полугруппы. Например,

$$Ax = \lim_{h\to 0}(T_h - I)\frac{x}{h}$$

по норме E_s при любых $s \in P$ и при любых $x \in E_{s+\delta}$.

Рассматриваются понятия ∞-группы (∞-полугруппы). При определенных условиях справедливы формулы

$$T_t = \exp(At), \quad \frac{d}{dt}T_t x = AT_t x = T_t Ax \quad \text{в} \quad E_s.$$

На дифференциальные уравнения в частных производных переносятся некоторые результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, обосновываются различные аналоги формулы Коши. В качестве примеров приводятся системы управления нагреванием стержня и колебаниями конечной струны.

Во второй статье В. И. Назарова [26] рассматривается точная управляемость линейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{2.9}$$

в шкале банаховых пространств $\{E_s,\ s \in P\}$, где $P = (-\infty, s_0)$, $-\infty < s_0 \leq +\infty$, A предполагается линейным и$_\delta$-непрерывным оператором в этой шкале ($0 < \delta < \infty$), B — линейный непрерывный оператор из U_s в E_s при всех $s \in P$, $\{U_s,\ s \in P\}$ — шкала банаховых пространств. Управление $u \in L_p([0, t_1], U_{s_1})$, т.е. принадлежит банахову пространству функций

$$\varphi(t) : [0, t_1] \to U_{s_1},$$

обладающих интегрируемой p-й степенью ($1 \leq p < \infty,\ t_1 > 0$). Предполагается, что A — генератор δ-полугруппы T_t в шкале $\{E_s,\ s \in P\}$.

Рассматривается множество

$$Q(t_1, L_p, U_{s_1}) = \{x :\ x = \int_0^{t_1} T_{t_1-\tau} Bu(\tau) d\tau, u \in L_p([0, t_1], U_s)\}$$

состояний x, в которые можно попасть из нуля с помощью управлений u.

Система (2.9) называется (L_p, U_{s_1}, E_{s_2})-*управляемой* ($s_1, s_2 \in P, s_1 \leq s_2$), если существует такое $t_1 > 0$, что

$$E_{s_2} \subset Q(t_1, L_p, U_{s_1}).$$

Показано, что в такой системе для любых состояний $x_0 \in E_{s_2+\delta}$ и $x_1 \in E_{s_2}$ найдется допустимое управление, переводящее точку x_0 в точку x_1.

Система (2.9) называется $[L_p, U_{s_1}, E_{s_2}]$-*управляемой* ($s_1, s_2 \in P, s_1 \leq s_2$), если существует такое $t_1 > 0$, что

$$E_{s_2} = Q(t_1, L_p, U_{s_1}).$$

При этом по определению считается, что такая система является также (L_p, U_{s_1}, E_{s_2})-управляемой.

Система (2.9) называется *точно L_p-управляемой*, если для любых $x_0, x_1 \in \bigcup_{s\in P} E_s$ найдутся $t_1 > 0$ и $u \in \bigcup_{s \in P} L_p([0, t_1], U_s)$ такие, что выполняется равенство

$$x_1 = T_{t_1} x_0 + \int_0^{t_1-\tau} T_{t_1-\tau} Bu(\tau) d\tau.$$

Теорема 2.16. *Пусть $A \in L(E_s, E_s)$, $B \in L(U_s, E_s)$. Для $[L_1, U_s, E_s]$-управляемости системы (2.9) необходимо и достаточно, чтобы при некотором $k \geq 0$ выполнялось равенство*

$$sp(BU_s, ABU_s, \ldots, A^k BU_s) = E_s.$$

В [26] содержится также ряд достаточных условий управляемости того или иного вида. Приведем один из типичных результатов:

Теорема 2.17. *Пусть A — генератор δ-полугруппы $\{T_t, t \geq 0\}$ в шкале банаховых пространств $\{E_s,\ s \in P\}$ такой, что при некоторых $q \geq 0$ и $c > 0$ для всех $s \in P$ и $s + 2\delta \in P$ выполнено неравенство*

$$\|T_\tau | L(E_{s+2\delta}, E_s)\| \leq Ce^{q\tau},$$

и пусть $E_{s_1} = BU_{s_1}$. Тогда система (2.9) является $(L_1, U_{s_1}, E_{s_1+2\delta})$-управляемой.

Аналогично формулируется теорема о точной L_1-управляемости. Еще одна теорема выражает необходимое и достаточное условие (L_2, U_{s_1}, E_{s_2})-управляемости в шкалах гильбертовых пространств уравнения (2.9), в котором оператор B зависит от t.

В статье приведены примеры с оператором Лапласа в качестве оператора A. Один из примеров описывает систему управления нагревом тора при отсутствии излучения с поверхности.

Исследования по управляемости и ε-управляемости системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

с неограниченным оператором A при помощи бесконечномерного управления, подчиненного ограничениям, изложены в статьях С. А. Минюка [28],[29]. В них основную роль играют некоторые свойства собственных векторов оператора $(-A^*)$.

В статье [28] рассматривается система управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.10}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2.11}$$

X и U — действительные банаховы пространства, $A : X \to X$, $B : U \to X$, оператор A неограничен, $\overline{D(A)} = X$, $x_0 \in D(A)$, $u \in \Omega \subset U$. Оператор B ограничен, причем найдется $u_0 \in \Omega$, для которого $Bu_0 = 0$ ($\Omega \cap kerB \neq \emptyset$). При фиксированном $T > 0$ управления $u(t)$ выбираются из некоторого подмножества $\tilde{\Omega}_T \subset L_2([0,T], U)$.

Оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{G(t)\}$ ограниченных операторов. Задача (2.10)–(2.11) предполагается равномерно корректной. Автор оперирует представлением решения по формуле Коши

$$x(t) = G(t)x_0 + \int_0^t G(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Рассматривается множество S_T *нуль-управляемой системы* (2.10). Это множество точек $x_0 \in D(A)$, для которых существует допустимое управление, переводящее x_0 в нуль за время T. Через $S = \bigcup_{T>0} S_T$ обозначается множество *нуль-управляемости* за свободное время. Для множеств ε-нуль-управляемости за время T и ε-нуль-управляемости за свободное время вводятся обозначения R_T и $R = \bigcup_{T>0} R_T$ соответственно. Еще более широким является множество $\tilde{R}$ — множество ε-нуль-управляемости системы (2.10), для точек x_0 которого время попадания T в ε-окрестность нуля зависит как от ε, так и от $x_0 : T = T(x_0, \varepsilon) > 0$. В определениях указано, что $R_T, R, \tilde{R} \subset D(A)$.

Следует отметить, что в обсуждавшейся выше работе [15] уже рассматривался случай (названный квази-ε-управляемостью), когда время попадания в ε-окрестность точки y_0 зависит как от ε, так и от начальной точки x_0. При этом изучалась более общая нестационарная динамическая система в банаховом пространстве, но при отсутствии ограничений на управление. Свойство ε-нуль-управляемости, рассматриваемое в [29], получается, когда y_0 равно нулю.

Вернемся к статье [28]. Далее в ней определяются системы, *локально нуль-управляемые* за время T и за свободное время, а также *локально ε-нуль-управляемые* за время T и за свободное время. Здесь требуется существование такой окрестности нуля, обозначенной O_X, что соответственно

$$O_X \cap D(A) \subset S_T, \quad \text{или} \quad O_X \cap D(A) \subset S, \quad \text{или} \quad O_X \cap D(A) \subset \tilde{R},$$

$$\text{или} \quad O_X \cap D(A) \subset R_T, \quad \text{или} \quad O_X \cap D(A) \subset R. \tag{2.12}$$

Свойство называется *глобальным*, если вместо (2.12) выполняются равенства $S_T = D(A)$, или $S = D(A)$, или $\tilde{R} = D(A)$, или $R_T = D(A)$, или $R = D(A)$.

Для получения нужных критериев приводится 8 лемм. В них используется понятие нормальной системы управления, опорного множества, рассматривается некоторая проблема моментов. Формулировки окончательных результатов опираются на ряд условий, высказанных в леммах. Перечислим эти условия.

1) Не существует собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего вещественному собственному значению $\lambda \leq 0$, *опорного* множеству $B\Omega = \{Bu : \ u \in \Omega\}$.

2) Не существует собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего комплексному собственному значению λ, *ортогонального* множеству $B\Omega$.

3) Для любого собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего $\lambda < 0$,

$$\exists \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Omega : \ \langle y, Bu_m \rangle \underset{m \to \infty}{\to} +\infty.$$

4) Для любого собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего λ с $Im\lambda \neq 0$, $Re\lambda < 0$,

$$\exists \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Omega : \ |\langle y, Bu_m \rangle| \underset{m \to \infty}{\to} +\infty.$$

5) Не существует собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего вещественному собственному значению $\lambda \leq 0$, *опорного* множеству $B\Omega$.

6) Не существует собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего комплексному собственному значению λ с $Re\lambda \leq 0$, $Im\lambda \neq 0$, *ортогонального* множеству $B\Omega$.

7) Для любого собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего $\lambda < 0$,

$$\exists \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Omega : \ \langle y, Bu_m \rangle \underset{m \to \infty}{\to} +\infty, \quad \exists \varepsilon > 0 : \ \langle y, Bu_m \rangle \geq \varepsilon \|u_m\|.$$

8) Для любого собственного вектора y оператора $(-A^*)$, отвечающего λ с $Im\lambda \neq 0$, $Re\lambda < 0$,

$$\exists \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Omega : \ |\langle y, Bu_m \rangle| \underset{m \to \infty}{\to} +\infty, \quad \exists \varepsilon > 0 : \ |\langle y, Bu_m \rangle| \geq \varepsilon \|u_m\|.$$

Доказаны следующие результаты:

Теорема 2.18. *Для локальной нуль-управляемости системы* (2.10) *за свободное время необходимо, а в случае нормальных систем управления и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1,2.

Теорема 2.19. *Для глобальной нуль-управляемости системы* (2.10) *за свободное время необходимо, чтобы выполнялись условия* 1,2,3,4, *а в случае нормальных систем управления достаточно, чтобы выполнялись условия* 1,2,7,8.

Теорема 2.20. *Для локальной ε-нуль-управляемости системы* (2.10) *необходимо, а в случае нормальных систем управления и достаточно, чтобы выполнялись условия* 5,6.

Теорема 2.21. *Для глобальной ε-нуль-управляемости системы* (2.10) *необходимо, чтобы выполнялись условия* 3,4,5,6, *а в случае нормальных систем управления достаточно, чтобы выполнялись условия* 5,6,7,8.

В конце статьи формулируются упрощения критериев в случае, когда множество Ω ограничено.

Перейдем ко второй статье С. А. Минюка [29]. Здесь вводятся следующие понятия.

Пусть $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2]$ и $f \in X^*$. Через Q_T обозначается множество состояний системы (2.10) при $x_0 = 0$, достижимых за время T, через Q — множество $\bigcup_{T>0} Q_T$. Система (2.10) называется *$T\mathbf{A}$-управляемой в направлении* $f \in X^*$, если $f(Q_T) \supset \mathbf{A}$. Система (2.10) называется *$T\mathbf{A}$-управляемой в пространстве* X, если она $T\mathbf{A}$-управляема в любом направлении $f \in X^*$, $\|f\| = 1$.

В формулировке критериев управляемости используются определения трех видов T-управляемости в направлении f и трех видов T-управляемости в пространстве X.

1. Система (2.10) называется *слабо* (или *просто*; или *сильно*) *T-управляемой в направлении* $f \in X^*$, если для некоторого $\mathbf{A}$ (или для некоторого $\mathbf{A}$ такого, что $0 \in int\mathbf{A}$; или для любого $\mathbf{A}$) она $T\mathbf{A}$-управляема в пространстве X в этом направлении f.

2. Система (2.10) называется *слабо* (*просто*; *сильно*) *T-управляемой в пространстве* X, если она слабо (просто; сильно) T-управляема в любом направлении $f \in X^*$, $\|f\| = 1$.

Подчеркивается, что сильная T-управляемость эквивалентна ε-управляемости за время T (попадание за это время из нуля в любую ε-окрестность произвольной точки $x_1 \in X$).

Более общие понятия вводятся путем исключения в определениях упоминания о фиксированном заранее числе T. Тогда в заключительной части определений говорится о существовании некоторого $T > 0$, для которого выполняются нужные свойства.

Вводится понятие *нормальной* системы в одном из трех смыслов (слабой, простой, сильной). Оно означает выполнение для системы (2.10) трех условий:

1) $\overline{D(A^*)} = X^*$;

2) сходимость некоторого ряда по корневым векторам оператора $(-A^*)$ к решению $\psi(t)$ системы $\psi'(t) = -A^*\psi(t)$ с начальным условием $\psi(T) = f \in D(A^*)$;

3) из управляемости в любом направлении $f \in D(A^*)$, $\|f\| = 1$, следует управляемость в любом направлении $f \in X^*$.
Автор использует также понятия *слабо (просто) сопряженно обратимой* нормальной системы.

Далее формулируются три теоремы — критерии слабой, простой и сильной управляемости нормальной системы. Например, критерий простой управляемости нормальной системы таков:

Теорема 2.22. *Нормальная система* (2.10) *просто управляема в пространстве X тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1,2 *и система управления* (2.10) *просто сопряженно обратима.*

Вводится понятие полноты линейной системы. Система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{2.13}$$

с начальным условием (2.11) называется *полной в пространстве* X, если при всех $T > 0$ ее множество состояний $G_T = \{G(T)x_0 : x_0 \in D(A)\}$ всюду плотно в X, т.е. $\overline{G_T} = X$.

Система (2.13) называется *T-полной (полной) в пространстве* X в направлении $f \in X^*$, если множество $f(G_T)$ (соответственно множество $f(G_T)$ при любом $T > 0$) содержит любой отрезок $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2]$. Доказана

Теорема 2.23. *Система* (2.13) *полна в пространстве X в любом направлении $f \in D(A^*)$, $\|f\| = 1$, тогда и только тогда, когда она сопряженно обратима.*

В настоящем обзоре нельзя не упомянуть о работах С. А. Авдонина, С. А. Иванова и их сотрудников (см. [30]–[32]) по управляемости систем с распределенными параметрами. Эти работы стоят несколько в стороне от рассмотренных выше исследований, так как имеют специфические особенности: сведение задачи управления к проблеме моментов относительно семейства показательных функций, выделение в качестве основного изучения параболических (в том числе с запаздыванием) и гиперболических систем уравнений в частных производных.

Общие результаты прилагаются к исследованию управляемости многоканальной акустической системы, неоднородной струны с управлением на двух концах, сети однородных струн с управлением в узлах, нескольких струн, упруго связанных в одной точке, колебаний прямоугольной мембраны с граничным, стартовым и точечным управлением и т.п.

Особенности, о которых говорилось выше, выделяют упомянутые работы в самостоятельное большое направление, выходящее за рамки тематики, положенной в основу предлагаемого обзора, поэтому остановимся кратко лишь на работе [31]. В ней рассматривается многомерная линейная параболическая система с запаздыванием. Граничные условия также включают запаздывание по времени. Вводится понятие *относительной управляемости* за время T (приведение решения $y(x,t)$ из любого начального состояния x в состояние $y(\cdot,T)=0$) и *полной управляемости* ($y(\cdot,t)=0$ при $t\geq T$). Определяются понятия относительной и полной *квазиуправляемости* (приведение решения системы в произвольную ε-окрестность начала в момент времени T или приведение и задержание решения в этой окрестности для всех $t\geq T$). Одно управляющее воздействие входит в уравнение, другое — в граничные условия. Сформулированы условия полной управляемости за любое время T, относительной и полной квазиуправляемости за любое время T. В доказательствах применяется метод моментов.

Завершая краткий перечень результатов о точной и ε-управляемости, полезно обратить внимание на следующее принципиальное соображение (цитирую по [32]): “С практической точки зрения отличие возможности попасть в некоторое состояние от возможности попасть в его произвольную ε-окрестность не имеет существенного значения. Важно поведение нормы управления, обеспечивающего это попадание при $\varepsilon\to 0$”.

Литература

1. Коробов В.И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, №12. С.2142–2150.

2. Шолохович Ф.А. Об управляемости в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1967. Т.3, №3. С.479–484.

3. Куперман Л.М., Репин Ю.М. К вопросу об управляемости в бесконечномерных пространствах // Докл. АН СССР. 1971. Т.200, №4. С.767–769.

4. Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S. Controllability of linear dynamical systems // Contrib. Different. Equat. 1963. Vol.1, №2. P.189–213.

5. Fattorini H.O. On complete controlability of linear systems // J. Different. Equat. 1967. Vol.3. P.391–402.

6. Куржанский А.Б. К управляемости в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 1969. Т.5, №9. С.1715–1718.
7. Шолохович Ф.А. Линейные динамические системы с управлением // Дифференц. уравнения. 1972. Т.8, №2. С.300–308.
8. Нефедов С.А., Шолохович Ф.А. Критерий ε-управляемости линейной системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12, №4. С.653–657.
9. Fattorini H.O. Control in finite time of differential equations in Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1966. Vol.19, №1. P.17–34.
10. Fattorini H.O. On Jordan operator abd rigidity of linear control systems // Revista de la Union Matematica Argentina. 1966. Vol.23, №1. P.67–75.
11. Нефедов С.А. О свойстве жесткости линейных динамических систем с управлением, заданных в бесконечномерных пространствах // Дифференц. уравнения. 1980. Т.16, №10. С.1786–1793.
12. Нефедов С.А. К теории управляемости систем с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, №11. С.1998–2001.
13. Нефедов С.А., Шолохович Ф.А. О полугрупповом подходе к задачам граничного управления // Изв. вузов. Математика. 1985. №12. С.37–42.
14. Нефедов С.А., Шолохович Ф.А. Критерий стабилизируемости динамических систем с конечномерным входом // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22, №2. С.223–228.
15. Шолохович Ф.А. Эпсилон-управляемость нестационарных линейных динамических систем в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23, №3. С.475–480.
16. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
17. Копец М.М. Об управляемости линейной системой в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13, №3. С.561–563.
18. Якубович В.А. Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления // Сиб. матем. журн. 1975. Т.16, №5. С.1081–1102.
19. Рабах Р. Об управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем в банаховом пространстве: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Харьков: ХГУ, 1978.
20. Коробов В.И., Нгуен Хоа Шон. Управляемость линейных систем в банаховом пространстве при наличии ограничений на управление. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т.16, №5. С.806–817.

21. Коробов В.И., Нгуен Хоа Шон. Управляемость линейных систем в банаховом пространстве при наличии ограничений на управление. II // Дифференц. уравнения. 1980. Т.16, №6. С.1010–1022.

22. Шапиро А.В. Об управляемости и наблюдаемости систем, описываемых дифференциальными уравнениями в банаховых пространствах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск: УрГУ, 1980.

23. Маринич А.П. О ε-управляемости линейных систем в банаховом пространстве и моментных неравенствах // Дифференц. уравнения. 1984. Т.20, №3. С.413–417.

24. 24. Шкляр Б.Ш. К управляемости линейных систем с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, №3. С.461–471.

25. Назаров В.И. Системы управления с распределенными параметрами в шкалах банаховых пространств. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, №2. С.238–249.

26. Назаров В.И. Системы управления с распределенными параметрами в шкалах банаховых пространств. II // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, №3. С.425–431.

27. Овсянников Л.В. Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1965. Т.163, №4. С.819–822.

28. Минюк С.А. К теории нуль-управляемости в банаховом пространстве линейных нормальных систем при наличии ограничений на управление // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31, №12. С.1994–2004.

29. Минюк С.А. К теории управляемости и полноты в банаховом пространстве линейных нормальных систем при наличии ограничений на управление // Дифференц. уравнения. 1996. Т.32, №4. С.501–508.

30. Авдонин С.А., Иванов С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент: Учеб. пособие. Киев: УМК ВО, 1989.

31. Авдонин С.А., Горшкова О.Я. Управляемость и квазиуправляемость параболических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, №3. С.442–451.

32. Авдонин С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ленинград: ЛГУ, 1991.

Статья поступила 20.11.1992 г.;
окончательный вариант 08.05.1998 г.